

Eerste Toets Fysische Systemen, 30-5-2008, uitwerking.

Beschouw de volgende (mathematische) slinger. De slinger bestaat uit een massalooze, onbuigbare staaf met lengte $L = 1$ m met aan het uiteinde een massa $m = 1,5$ kg.

Fout!

De bewegingsvergelijking voor de mathematische slinger is:

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{g}{L} \sin\theta = 0 \quad (1)$$

Hierin is $g = 9,81$ m/s² de valversnelling ten gevolge van de aantrekking van de aarde.

Als de slinger een harmonische trilling zou uitvoeren, dan zou de formule als volgt moeten luiden:

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \omega_0^2 \theta = 0 \quad (2)$$

Waarin ω_0 de hoekfrequentie van de trilling is.

a) Onder welke aanname mogen we (1) vereenvoudigen tot (2)? Bereken in dat geval de cirkelfrequentie van de trilling.

Dit kan indien de benadering $\sin\theta \approx \theta$ nog goed genoeg is, dus voor voldoende kleine θ

In dat geval is $\omega_0 = \sqrt{\frac{g}{L}} \approx 3,13$ s

Neem vanaf nu aan dat de slinger een harmonische trilling volgens (2) uitvoert, met een amplitude θ_0 .

b) Wat is een oplossing van bewegingsvergelijking (2) die een harmonische trilling beschrijft? Laat zien dat dit een oplossing is.

Oplossing $\theta(t) = \theta_0 \cos(\omega_0 t)$ Invullen moet tonen dat de dubbele afgeleide correct wordt berekend.

Mensen en dieren die rechtop lopen hebben een *natuurlijke* loopsnelheid, voor mensen is het bijvoorbeeld gemakkelijk om 3 km/h te lopen, maar moeilijk om dit te verhogen naar 10 km/h. Als we een rechtopstaand been van een dier modelleren als een uniforme staaf die aan de heup is opgehangen, kunnen we meer inzicht krijgen in de achterliggende fysica van deze natuurlijke loopsnelheid.

Natuurlijk is een been aan het heupgewricht verre van een mathematische slinger. Als we desondanks die vergelijking eens maken:

c) Wat is de slingtijd van het been (van 1 m lengte) rondom het heupgewricht?

Oplossing Je kunt eerst ω_0 invullen en dan de trillingstijd berekenen, maar het mooist is eerst symbolisch

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{L}{g}} \text{ en dan invullen: } T = 2,0 \text{ s}$$

d) Één stap heeft ongeveer dezelfde lengte als het been zelf. Bereken nu de loopsnelheid van een volwassen mens in km/h (denk hierbij goed na over de (halve) slingtijd en de afwisseling van beide benen!) Geef goed aan hoe u aan uw antwoord komt.

Oplossing Een been maakt een halve slinger, dus in de halve slingtijd, rondom het dan staande been. Dan neemt dat been het over en slingert het andere been. Iedere halve slinger brengt de persoon dus de lengte van een been verder. Snelheid is dus $L/(1/2 T)$ in m/s hier leidt dat tot 1 m/s, ofwel 3,6 km/uur

e) Fossielen tonen aan dat een volwassen *Tyrannosaurus Rex* benen van 3.1m had. Geef een schatting van de natuurlijke loopsnelheid van een *T. Rex*.

Oplossing Snelheid is ook hier $L/(1/2 T)$, maar zowel L als T zijn anders. Terugrekenend vinden we door L en

$$T \text{ in te vullen: } v = \frac{1}{\pi} \sqrt{Lg} \text{ Voor de } T. \text{ Rex levert dit } v=1.76 \text{ m/s ofwel } 6,3 \text{ km/h}$$