

Tentamen Fysische Systemen, 23-8-2010, 9-12 uur

Vermeld (duidelijk!) naam, geboortedatum, studie en studienummer op het 1^e vel papier; op ieder volgend vel uw naam. **Gebruik voor ieder vraagstuk een apart vel papier, zodanig dat het te scheiden is van de andere opgaven!**

Het gebruik van diktaat, boeken etc. en eigen kladpapier is niet toegestaan. Vraag desgewenst om extra papier.

Opgave 1. Gebruik voor ieder vraagstuk een apart vel papier, zodanig dat het te scheiden is van de andere opgaven!

Wanneer iemand een steen in een vijver werpt, zullen er golven ontstaan. Wanneer nu op een bepaalde vaste afstand van de plaats waar de steen in het water geworpen is gekeken wordt naar de hoogte van de waterstand t.o.v. de normale stand, varieert deze hoogte als functie van de tijd. Deze hoogte kan beschreven worden door een gedempte harmonische trilling.

De bewegingsvergelijking voor een gedempte harmonische trilling (**niet aangedreven!**) wordt gegeven door:

$$\frac{d^2h(t)}{dt^2} + 2\gamma \frac{dh(t)}{dt} + \omega_0^2 h(t) = 0$$

met $h(t)$ de hoogte van de golf als functie van de tijd, γ de dempingscoëfficiënt en ω_0 de eigen-cirkelfrequentie.

a) Omschrijf achtereenvolgens de fysische betekenis van de drie termen links van het =-teken en leg uit waarom de hoogte er respectievelijk in tweede afgeleide, eerste afgeleide en "gewoon" in voorkomt. Geef tevens de eenheden van γ en ω_0 .

$h(t) = Ae^{-\gamma t} \cos(\omega t)$ is de oplossing van deze bewegingsvergelijking voor $h(t)$.

b) Laat zien dat dit klopt en geef de uitdrukking voor ω als functie van γ en ω_0 . (*zorgvuldig rekenen!*)

De golven reizen over het wateroppervlak met een snelheid van 1,5 m/s. Tussen twee opvolgende maxima is de afstand 0,75 m. Verder is gegeven dat op $t=0$ $h(0)=10$ cm en de demping $\gamma = 0,2 \text{ s}^{-1}$. Je neemt de golven waar op 9 m van de plek waar de steen in de vijver belandt.

c) Bereken ω , en vervolgens met het resultaat uit b) ook ω_0

d) Bereken de hoogte van de piek van de eerste golf die je bereikt.

e) Trillingen in water zijn zwak gedempt, dat is een ervaringsfeit. Klopt deze waarneming met de waarden voor γ en ω ? (Mocht u ω niet hebben gevonden, wat voor waarde zou ω t.o.v. γ moeten hebben?)

f) Wat voor waarde zou γ hebben bij "trillingen" in stroop? Wat heeft dat voor consequentie voor de oplossing van de bewegingsvergelijking?

Opgave 2. Gebruik voor ieder vraagstuk een apart vel papier, zodanig dat het te scheiden is van de andere opgaven!

In een bepaalde elektrische deken zitten drie parallelle warmteelementen. Om veiligheidsredenen werkt de deken met een transformator en gelijkrichter die de spanning naar 48 V gelijkspanning terugbrengt. Voor ieder van de warmteelementen moet draad van maximal 10 m lang en een diameter van 0,5 mm gebruikt worden. De keuze bestaat uit Nichroom ($\rho = 1,2 \times 10^{-6} \Omega\text{m}$) of Chromel ($\rho = 0,7 \times 10^{-6} \Omega\text{m}$).

De deken mag maximaal 120 W verbruiken en alle drie de warmte elementen moeten even warm worden, dus in elk element moet dezelfde draad worden gebruikt.

- Wat is de stroom die de spanningsbron moet leveren?
- Welke weerstand moet ieder van de warmte-elementen hebben?
- Welke van de twee bovenstaande materialen kan of kunnen hiervoor worden gebruikt, gegeven de maximale lengte van 10 m per draad?

Om de warmte-elementen een langere levensduur te geven moet na inschakeling de stroom geleidelijk toenemen, zodanig dat na 100 ms pas de helft van de maximale stroom bereikt is. Hiertoe wordt in serie tussen de spanningsbron en de drie parallelle draden een spoel geplaatst.

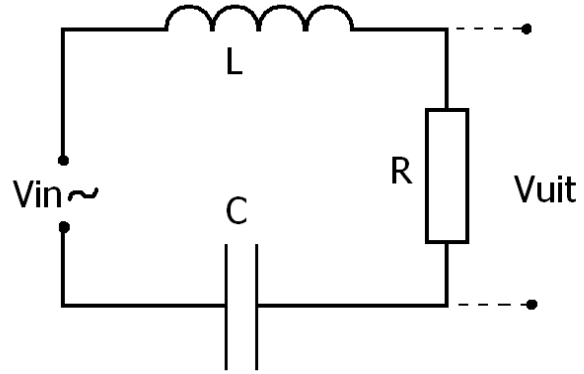
De uitdrukking voor de stroom als functie van de tijd na inschakeling weergeeft luidt:

$$I(t) = \frac{V}{R} \left(1 - e^{-\frac{R}{L}t} \right) \quad \text{Met } R \text{ de totale weerstand van de drie parallelle draden.}$$

- Wat is het de waarde die de spoel minimaal moet hebben? (als u in b de weerstand niet hebt kunnen vinden neemt u hier $R = 25 \Omega$, dit is overigens niet de correcte oplossing)
- Bij uitschakelen wordt het circuit normaal gesproken onderbroken, en loopt er direkt geen stroom meer. Hoe reageert het circuit daarop? (ook als u d) niet hebt kunnen beantwoorden kunt u hierop een antwoord geven)

Opgave 3. Gebruik voor ieder vraagstuk een apart vel papier, zodanig dat het te scheiden is van de andere opgaven!

Gegeven de nevenstaande schakeling.



- Bereken de complexe impedantie van dit circuit
- Bereken de (complexe) verhouding tussen V_{uit} en V_{in}
- Toon aan dat de overdracht van het circuit:

$$|A| = \frac{|V_{UIT}|}{|V_{IN}|} = \frac{R}{\sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}}$$

- Bepaal het faseverschil tussen V_{in} en V_{uit} .

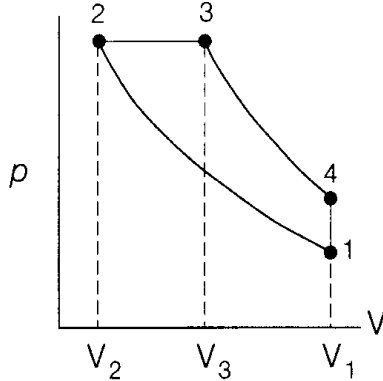
De waarden van de componenten zijn: spoel 0,1 mH, weerstand 2 Ω , condensator 47 μF .

- Bij welke waarde van ω is de overdracht $|A|$ maximaal? Wat is de waarde van $|A|$?
- Bereken de cirkelfrequenties waarvoor geldt $|A| = 1/2 |A|_{\max}$.

(Let op bij het oplossen: voor $\omega < \omega_{\text{res}}$ is de term $\omega L - \frac{1}{\omega C}$ negatief, voor $\omega > \omega_{\text{res}}$ positief!)

Opgave 4. Gebruik voor ieder vraagstuk een apart vel papier, zodanig dat het te scheiden is van de andere opgaven!

De werking van de dieselmotor wordt geïdealiseerd voorgesteld met de weergegeven Diesel-cyclus met ideaal gas (zie figuur). De vier takken in het PV-diagram zijn als volgt:



- 1→2: Adiabatische compressie, dus $T_1(V_1)^{\gamma-1} = T_2(V_2)^{\gamma-1}$, met $\gamma = C_p/C_v$.
 2→3: Spontane verbranding bij constante druk, levering van warmte Q_H in isobare omstandigheden. Dan geldt: $T_3 - T_2 = Q_H/C_p$
 3→4: Adiabatische expansie van de uitlaatgassen: $T_3(V_3)^{\gamma-1} = T_4(V_4)^{\gamma-1}$
 4→1: Het afstaan van Q_C aan de omgeving, bij gelijkblijvend volume. Er geldt: $T_4 - T_1 = Q_C/C_v$.

- a) Leg uit dat de per cyclus netto geleverde arbeid gelijk is aan $Q_H - Q_C$
 b) Geef het rendement η van deze cyclus, uitgedrukt in de warmtes Q_H en Q_C

Omschrijven m.b.v. de hierboven gegeven vergelijkingen voor de takken van het PV-diagram (en de ideale gaswet) levert:

$$\eta = 1 - \frac{1}{r^{\gamma-1}} \frac{1}{\gamma} \frac{r_{cf}^{\gamma} - 1}{r_{cf} - 1} \quad \text{waarin} \quad r = \frac{V_1}{V_2} \text{ de compressieverhouding en } r_{cf} = \frac{V_3}{V_2} \text{ de cut-off ratio}$$

Voor een zekere Diesel-motor geldt dat $r=25$ en $r_{cf}=2,5$. Verder is $\gamma=1,2$

- c) Wat is het rendement van deze ideale Diesel motor?

Om in een nieuwe, zuinige personenauto constant 120 km/uur te rijden is een vermogen nodig van 14 kW. Verder levert 1 liter dieselolie 35 MJ verbrandingswarmte.

- d) Hoeveel benzine verstoekt deze auto met deze ideale motor per 100 km? (Let op: energie = vermogen x tijd, niet vermogen x afstand) (mocht u het antwoord bij c niet hebben gevonden reken dan met $\eta = 40\%$, overigens niet het juiste antwoord)

- e) De modernste zuinige auto's met dieselmotor hebben een verbruik van ca 4 liter per 100 km bij 120 km/uur. Wat concludeert u uit de vergelijking tussen dit getal en uw antwoord bij d) ?

Uitwerkingen Tentamen Fysische Systemen, 23-8-2010, 9-12 uur

Opgave 1.

a) eerste term: Dit is de tweede afgeleide van de hoogte, dus dit is de versnelling van het water. Deze term komt van de Newtoniaanse $F=m \cdot a$ vergelijking. Tweede term: de eerste afgeleide, dus de snelheid van het water. Dit beschrijft de wrijvingskracht op het water die tot demping leidt. Derde term: de plaats (uitwijking) van het water. Resultaat van het feit dat we hier met een harmonische beweging van doen hebben waarin de kracht evenredig, maar tegengesteld is aan de afwijking: $F=-k \cdot h$. In dit geval is die kracht de zwaartekracht. Eenheid van γ is s^{-1} en van ω_0 is rad/s.

b) eerste afgeleide van de oplossing: $-\omega A e^{-\gamma t} \sin(\omega t) - \gamma A e^{-\gamma t} \cos(\omega t)$

tweede afgeleide: $-\omega^2 A e^{-\gamma t} \cos(\omega t) + \omega \gamma A e^{-\gamma t} \sin(\omega t) + \omega \gamma A e^{-\gamma t} \sin(\omega t) + \gamma^2 A e^{-\gamma t} \cos(\omega t)$

het geheel invullen levert twee termen, een voor de cos en een voor de sin. Die moeten ieder voor zich gelijk zijn aan nul. De sinus term is dat: alle termen vallen weg. De cos-term heft als argument:

$$-\omega^2 + \gamma^2 - 2\gamma^2 + \omega_0^2 \quad \text{Dit moet nul zijn, en daaruit volgt:} \quad \omega^2 = \omega_0^2 - \gamma^2$$

c) Afstand 0,75 tussen de maxima, snelheid 1,5 m/s geeft $T = 0,5$ s en dus $\omega = 12,566... \text{ rad/s}$ (4π). Gebruik makend van het antwoord van b) leveren de waarden van γ en ω een waarde voor ω_0 van 12,567 rad/s

d) Verder gegeven dat $h(0)=10\text{cm}$ en $\gamma=0,2 \text{ s}^{-1}$. Waarneming op 9 meter afstand ofwel 6 s na begin trilling. Dit invullen in $A e^{-\gamma t}$ levert (cos-waarde op de piek =1): 3,01 cm.

e) zwak gedempt komt overeen met een waarde van γ die kleiner is dan ω_0

f) In stroop zou γ (veel) groter moeten zijn dan ω_0 . De oplossing van de bewegingsvergelijking zoals hier gepresenteerd is dan niet meer geldig.

Opgave 2.

a) 48 V, 120 W, $P=V \times I$, dus $I = 2,5$ A

b) $V=I \times R$, dus R-totaal = 19,2 Ω , ieder van de drie draden dus 57,6 Ω

c) Een draad van 57,6 Ω moet een lengte hebben van

$$L = \frac{AR}{\rho} \quad \text{ingevuld levert dit voor Nichroom en lengte op van } 9,424777... \text{ m en voor Chromel } 16,156... \text{ m} \quad \text{Dus alleen Nichroom is geschikt.}$$

d) de e-macht moet op $t = 100$ ms dus de waarde 0,5 hebben. hieruit volgt $L = 2,77$ H

e) De spanning over de spoel zal zeer sterk oplopen, van wege de grote waarde van dI/dt . (Dit levert vaak een vonk op rond de schakelaar).

Opgave 3.

a) De complexe impedantie is $Z = i\omega L + R - \frac{i}{\omega C}$

b)

$$\frac{V_R}{V_{IN}} = \frac{R}{R + i\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)} = \frac{R\left(R - i\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)\right)}{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}$$

c) Dit volgt direct uit b)

d) Het faseverschil $\varphi = \frac{\text{Im}(A)}{\text{Re}(A)} = \frac{\omega L - \frac{1}{\omega C}}{R}$

e) maximale overdracht voor $\omega L = \frac{1}{\omega C}$ dus $\omega = \frac{1}{\sqrt{LC}}$

|A| is dan gelijk aan 1

f) Dan moet de term $\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2$ gelijk zijn aan $3R^2$, dus $\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right) = \pm\sqrt{3}R$

met ω vermenigvuldigen levert een kwadratische vergelijking op, die met de abc-formule kan worden opgelost. De oplossing is

$$\omega_{1,2,3,4} = \frac{\mp\sqrt{3}R \pm \sqrt{3R^2 + 4L/C}}{2L}$$

Twee van de vier oplossingen zijn negatief, en dus niet fysisch. De andere twee leveren: 5323 en 39964 rad/s (ter vergelijking $\omega_0 = 14586,5$ rad/s)

Opgave 4.

a) Over de gehele cyclus is de verandering in E gelijk aan nul. De eerste hoofdwet zegt dat $\Delta E = Q + W$. Dus moet gellen dat W gelijk is aan de netto geleverde warmte, en dat is $Q_H - Q_C$ (immers de andere twee takken zijn adiabatisch)

b)
$$\eta = \frac{W}{Q_H} = \frac{Q_H - Q_C}{Q_H} = 1 - \frac{Q_C}{Q_H}$$

c) $\eta = 42\%$ (0,4155...)

d) vermogen 14kW gedurende 100 km = 100/120 uur, dus totale energie nodig is $100/120 * 3600 * 14e3 = 42$ MJ

Dit wordt met rendement van c) omgezet, dus hoeveelheid primaire energie is $42/0,4155 = 101,08$ MJ, hiervoor is 2,888 liter dieselolie nodig

e) 4 ipv 2,888 suggereert dat deze dieselmotoren in de praktijk een rendement van $42 * 2,88/4 = 30\%$ hebben.